Ранее мы решали задачи для «красивых» областей – прямоугольника, круга, шара и т.д. Теперь перейдём к произвольным. А кроме того, добавим время, которого раньше не было!

Пускай у нас есть в пространстве (или плоскости) область D, где происходит какой-то физический процесс. Различные точки этой области D будем обозначать как M.
S – граница этой области.
$\bar{D}$ - объединение D и S.
Тогда

Постановка общей начально-краевой задачи

Примет вид:

$$\begin{cases} \rho(M)P_t[u] = L_M[u] + f(M,t) \text{ — уравнение, } M \in D, \ t \in [0;+\infty) \\ \left.\begin{array}{l} u(M,0) = \varphi(M), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(M,0) = \varphi_1(M), \ldots, \\ \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}(M,0) = \varphi_m(M), \ M \in \bar{D}, \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{начальные условия} \\ \text{по времени,}\end{array} \\ N_P[u(P,t)] = \mu(P,t) \text{ — граничные условия,} \end{cases}$$

$$P \in S \ (S \text{ — граница } D), \ t \in [0,+\infty),$$

$$P_t[u] \equiv \sum_{k=0}^{m+1} a_k(t) \frac{\partial^k u(M,t)}{\partial t^k},$$

$$L_M[u] \equiv div\,\{k(M) grad\,(u)\} - q(M)u,$$

$$N_P[u] \equiv \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u,$$

$$k(M) > 0, \ \rho(M) > 0, q(M) \geqslant 0 \text{ при } M \in D,$$

$$\alpha(P) \geqslant 0, \ \beta(P) \geqslant 0, \ \alpha(P) + \beta(P) > 0.$$

А затем сделаю то, что не сделал Боголюбов: дам подробный комментарий, что здесь вообще происходит.
Сначала обратим внимание на систему из 4 строчек.

Сверху стоит дифур, сердце задачи.

$P_t[u]$ – временной оператор (на что указывает буква t в качестве индекса). Включает в себя линейную комбинацию производных t по времени. Если расписать сумму в ряд, то вид этого оператора станет более понятен:

$$a_0(t) + a_1(t)\frac{du}{dt} + a_2(t)\frac{d^2u}{dt^2} + \dots a_m(t)\frac{d^m u}{dt^m}$$

$L_M[u]$ – координатный оператор (на что указывает буква M в качестве индекса). Этакий трёхмерный/двумерный аналог оператора Штурма-Лиувилля (который тоже обозначался буквой L). Вот так он выглядит в одномерном виде (это всё интуры, ну только там u как y обозначалась):

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right) - q(x)u(x)$$

Сравним с

$$L_M[u] \equiv div\,\{k(M)grad\,(u)\} - q(M)u,$$

Вычитыемое вообще остаётся без изменений (неизвестная функция домножается на известную, т.е. q()), в

А так как у нас тут всё-таки всё трёхмерно, то производные по одной координате заменяются на дивергенцию и градиент.

Итак, дифур мы разобрали.

Следующие две строчки – начальные условия. Мы должны знать полностью состояние в нулевой момент времени. И само u в любой точке D, и все производные.

Последняя строчка – граничные условия в любой времени. Оператор N[] – это просто условие 3-го рода. Если α=0, то оно превращается в ГУ первого рода. Если β=0 – в ГУ третьего рода.

Тут нас ждёт небольшое облегчение по сравнению со всякими прямоугольниками и цилиндрами – ГУ одно и то же. Если вы помните, во всяких прямоугольниках на одной стороне может быть ГУ 1-го рода, на другой стороне ГУ 2 рода, на третьей ГУ 3-го рода. Здесь ГУ одного рода на всю поверхность в трёхмерном случае/кривую в двумерном.

Задачу поставили. Как её решать?

Например, так:

61. Изложите общую схему метода разделения переменных (метода Фурье). К решению каких задач можно свести решение общей начально-краевой задачи в линейном случае (редукция полной задачи)?

Переменные нужно разделять не все, а лишь пространственные и временную – t.

Нужно представить решение в виде разложения по СФ области. Это вы уже делали на семинарах, решая задачи теплопроводности и колебания в разных областях! Откройте ММФ15, например. Именно там такой подход приводил к успеху и вас это и спрашивают.